ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1988

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES DURÉE : 3 HEURES

Soit E l'espace des fonctions f continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes et telles que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

converge absolument. Pour p entier positif ou nul, on note F_p le sous-espace des fonctions de classe C^p qui sont dans E ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre p.

I

1. a. Si $f \in E$ montrer que l'expression :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi xt}\, dt$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On appelle $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. Vérifier que l'application $f \longmapsto \hat{f}$ de E dans l'espace des fonctions à valeurs complexes, est $\mathbb{C}$-linéaire.

b. Si $f \in F_0$, montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, en envisageant $\hat{f}$ comme limite quand $n \longrightarrow +\infty$ de l'intégrale

$$\hat{f}_n(x) = \int_{-n}^{+n} f(t)\, e^{-2i\pi xt}\, dt.$$

2. On veut établir la propriété suivante pour $f \in E$:

(P) $\lim_{|x| \to \infty} \hat{f}(x) = 0$

Démontrer (P) successivement dans les cas suivants :

a. lorsque f est la fonction caractéristique d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$,

b. lorsque f est nulle en-dehors d'un intervalle compact [a, b] de $\mathbb{R}$, et continue sur cet intervalle (on pourra approcher f par une combinaison linéaire finie de fonctions du type envisagé en (a)),

c. lorsque $f \in E$ est nulle en-dehors d'un intervalle compact [-A, A],

d. pour $f \in E$ quelconque.

3. Soit f une fonction de F_1.

a. Montrer que l'on a $\lim_{|t| \to \infty} |f(t)| = 0$.
(On commencera par montrer que cette limite existe).

b. En effectuant une intégration par parties, exprimer la valeur en x de la transformée de Fourier $\hat{f'}$ de f' au moyen de x et de $\hat{f}$.

c. Si f est dans F_p, que vaut $\widehat{f^{(p)}}(x)$? Montrer que si f est dans F_2 alors $\hat{f}$ est dans F_0.

4. Soit f une fonction de classe C^1 (qui n'est plus nécessairement dans E) telle que f' est dans E. On suppose que l'on a : $\lim_{|t| \to \infty} f(t) = 0$.
Montrer que la transformée de Fourier de f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

5. a. Soit f dans E, telle que la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est dans F_0. Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la transformée de Fourier de la fonction $t \longmapsto -2i\pi tf(t)$.

b. Soit $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$. Vérifier qu'elle a les propriétés envisagées dans (a) et calculer sa transformée de Fourier.

6. On suppose que f est dans F_1 et que $t \longmapsto tf'(t)$ est dans F_0.

a. Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en utilisant le (3.b.).

b. En s'inspirant du (3.a.) montrer que l'on a $\lim_{|t| \to \infty} tf(t) = 0$

c. Etablir pour $x \in \mathbb{R}^*$ la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi tf(t)\, e^{-2i\pi xt}\, dt$ et son égalité avec $\left(\hat{f}\right)'(x)$.

Tournez la page S. V. P.

1. On applique les résultats de la section I au calcul de la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

   a. Vérifier que f est une fonction de F_1. Calculer $\widehat{f}(0)$.

   b. Montrer que sa transformée de Fourier est une fonction paire vérifiant sur $]0, +\infty[$ l'équation : $(\widehat{f})'' - 4\pi^2\widehat{f} = 0$.

   (On utilisera une équation différentielle linéaire du premier ordre dont f est solution et on se servira des propriétés établies dans la section I).

   En déduire une expression simple de $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ la transformée de Fourier de la fonction

   $t \longmapsto f_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}$ en se servant du résultat de la question précédente.

3. a. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et que sa somme S(t) vérifie les inégalités :

   $$0 \leqslant S(t) - \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

   En déduire l'équivalence : $S(t) \underset{|t|\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2|t|}$

   La fonction S est-elle dans F_0 ?

   b. Montrer que la fonction S'(t) est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

   $0 \leqslant -tS'(t) \leqslant 2S(t)$.

   En déduire que S' appartient à F_0.

   c. Pour N entier, $N \geqslant 1$, on pose $R_N(t) = \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(t)$.
   Etablir les inégalités :

   $$|R'_N(t)| \leqslant \frac{2|t|}{t^2+N^2} \quad ; \quad R_N(t) \leqslant \frac{\pi}{t^2+N^2}.$$

   Montrer que la suite $\widehat{R'_N}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En déduire l'égalité :

   $$\widehat{S'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f'_n}(x).$$

   d. Déduire de ce qui précède une expression de $\widehat{S}$ sur $\mathbb{R}^*$ utilisant les fonctions usuelles.

- - - - - - - -

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail